

(7 pages)
S.No. 2393

17UMA08

(For the candidates admitted from 2017-2018 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2019.

Fourth Semester

Mathematics

TRIGONOMETRY AND ANALYTICAL GEOMETRY
OF 3D

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Write the expansion of $\sin n\theta$.

$\sin n\theta$ - னின் விரிவாக்கத்தை எழுது.

2. Prove that $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ என நிரூபி.

3. Separate into real and imaginary part of $\sin h(x+iy)$.

$\sin h(x+iy)$ என்பதில் மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை பிரித்து எழுது.

D. Karunya
S. Hamalatha

4. Find the expression for $\log(4+3i)$.

$\log(4+3i)$ என்பதன் விரிவாக்கத்தை எழுது.

5. Find the equation of the line joining the points $(1, -1, 2)$ and $(4, 2, 3)$.

$(1, -1, 2)$ மற்றும் $(4, 2, 3)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாக செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.

6. Write down the formula for finding the angle between the straight line $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ and the plane $ax+by+cz+d=0$.

$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கும் $ax+by+cz+d=0$ என்ற தளத்திற்கும் இடையே உள்ள கோணத்தை காணும் சூத்திரத்தை எழுது.

7. Find the equation of the sphere with centre at $(-1, 2, -3)$ and radius 3.

மையம் $(-1, 2, -3)$ மற்றும் ஆரம் 3 கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. What is the equation of the tangent plane to the sphere $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ at (x_1, y_1, z_1) ?

கோளம் $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ க்கு (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியில் தொடுதள சமன்பாடு என்ன?

9. Define right circular cone.

செங்குத்து வட்ட கூம்பு வரையறு.

10. Write the general equation to the cone which touches three co-ordinate planes.

மூன்று ஆயதளங்களை தொடும் கூம்பின் சமன்பாட்டை எழுது.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Prove that $\frac{\cos 5\theta}{\cos \theta} = 1 - 12 \sin^2 \theta + 16 \sin^4 \theta$.

$\frac{\cos 5\theta}{\cos \theta} = 1 - 12 \sin^2 \theta + 16 \sin^4 \theta$ என நிரூபி.

Or

(b) If $u = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$, prove that

$$\tan h \frac{u}{2} = \tan \frac{\theta}{2}$$

$u = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$ எனில் $\tan h \frac{u}{2} = \tan \frac{\theta}{2}$ என நிரூபி.

3

S.No. 2393

12. (a) If $\alpha + i\beta = \sin h^{-1}(1+i)$, prove that $\tan \beta = \tanh \alpha$.

$\alpha + i\beta = \sin h^{-1}(1+i)$ எனில் $\tan \beta = \tanh \alpha$ என நிரூபி.

Or

(b) Separate into real and imaginary part of $(\alpha + i\beta)^{x+iy}$.

$(\alpha + i\beta)^{x+iy}$ என்பதை மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளாக பிரித்து எழுது.

13. (a) Find the image of the point (1, -2, 3) in the plane $2x - 3y + 2z + 3 = 0$.

(1, -2, 3) என்ற புள்ளியின் பிம்பத்தை $2x - 3y + 2z + 3 = 0$ என்ற தளத்தில் காண்க.

Or

(b) Find the equation of the line passing through (2, 1, -2) and perpendicular to the plane $3x - 5y + 2z + 4 = 0$.

(2, 1, -2) என்ற புள்ளி வழியாக செல்லும் மற்றும் $3x - 5y + 2z + 4 = 0$ என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4

S.No. 2393

[P.T.O.]

4. (a) Find the equation of the sphere having the circle $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 7 = 0$, $2x - y + 2z = 5$ as a great circle.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 7 = 0.$$

$2x - y + 2z = 5$ என்ற வட்டத்தினை பெரிய வட்டமாகக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

Or

- (b) Find the equation of the sphere passing through the points $(1, 1, -1)$, $(-5, 4, 2)$, $(0, 2, 3)$ and having its centre on the plane $3x + 4y + 2z = 6$.

$(1, 1, -1)$, $(-5, 4, 2)$, $(0, 2, 3)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாக செல்வதும் மற்றும் கோளத்தின் மையம் $3x + 4y + 2z = 6$ என்ற தளத்தின் மீதும் அமைந்திருப்பின் அக்கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

- (a) Show that the equation of a right circular cone whose vertex is O, axis OZ and semi-vertical angle α is $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$.

O-வை உச்சியாகவும், OZ-அச்சாகவும் மற்றும் அரை உச்சிக்கோணம் α எனவும் கொண்ட செங்குத்து வட்ட கூம்பின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$ என நிரூபி.

Or

5

S.No: 2393

- (b) Show that the general equation to a cone which passes through the three axes is $fyz + gzx + hxy = 0$.

மூன்று ஆய அச்சுகள் வழியாகச் செல்லும் கூம்பின் பொதுவான சமன்பாடு $fyz + gzx + hxy = 0$ என நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Prove that \checkmark
 $\sin^4 \theta \cos^3 \theta = \frac{1}{64} [\cos 7\theta - \cos 5\theta - 3 \cos 3\theta + 3 \cos \theta]$

$$\sin^4 \theta \cos^3 \theta = \frac{1}{64} [\cos 7\theta - \cos 5\theta - 3 \cos 3\theta + 3 \cos \theta]$$

என நிரூபி.

17. (a) Prove that $\sinh^{-1} x = \log_e [x + \sqrt{x^2 + 1}]$.

(b) Prove that $\cosh^{-1} x = \log_e [x + \sqrt{x^2 - 1}]$.

(அ) $\sinh^{-1} x = \log_e [x + \sqrt{x^2 + 1}]$ என நிரூபி.

(ஆ) $\cosh^{-1} x = \log_e [x + \sqrt{x^2 - 1}]$ என நிரூபி.

6

S.No. 239

18. Prove that the lines $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+10}{8} = \frac{z-1}{2}$;

$\frac{x+3}{-4} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-4}{1}$ are coplanar. Find also their point of intersection and the plane through them.

கீழ்க்கண்ட நேர்க்கோடுகள் ஒருதளத்தில் அமைந்தவை என நிரூபி. வெட்டுப்புள்ளி மற்றும் தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+10}{8} = \frac{z-1}{2}; \quad \frac{x+3}{-4} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-4}{1}$$

19. Find the equation of the sphere which passes through the circle $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 0$, $x + 2y + 3z = 8$ and touches the plane $4x + 3y = 25$.

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 0$, $x + 2y + 3z = 8$ என்ற வட்டத்தின் வழியாக செல்லும் மற்றும் $4x + 3y = 25$ என்ற தளத்தினைத் தொடும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

20. Find the condition for the equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$

to represent a cone.

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

என்ற சமன்பாடு ஒரு கூம்பாக இருப்பதற்கான நிபந்தனைகளைக் காண்க.

(pages)

No. 2035

17UMA08

S. Hemalatha
~~S. Hemalatha~~

for the candidates admitted from 2017-2018 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2019.

Fourth Semester

Mathematics

TRIGONOMETRY AND ANALYTICAL GEOMETRY
OF 3D

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions

Write the expansion of $\cos n\theta$.

$\cos n\theta$ ன் விரிவாக்கத்தை எழுது.

If $\tan \frac{x}{2} = \tanh \frac{x}{2}$, prove that $\cos x \cosh x = 1$.

$\tan \frac{x}{2} = \tanh \frac{x}{2}$ எனில் $\cos x \cosh x = 1$ என நிகழ்த்து.

Find the value of $\cosh^{-1} x$.

$\cosh^{-1} x$ ன் மதிப்பு காண்க.

4. Find the expansion of $\log 3$.

$\log 3$ ன் விரிவாக்கத்தை எழுது.

5. Find the point where the line $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+6}{4}$ intersect the plane $2x+4y-z-2=0$.

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+6}{4}$$

என்ற

நேர்க்கோடு

$2x+4y-z-2=0$ என்ற தளத்தை வெட்டுமையின் வெட்டும் புள்ளி காண்க.

6. Write down the condition that two straight lines

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = \frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m_1} = \frac{z-z_2}{n_1}$$

are coplanar.

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = \frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m_1} = \frac{z-z_2}{n_1}$$

என்ற இறு நேர்க்கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைவதற்கான நிபந்தனையை எழுது.

7. Find the co-ordinates of the centre and radius of the sphere $2x^2+2y^2+2z^2-2x+4y+2z-15=0$.

$$2x^2+2y^2+2z^2-2x+4y+2z-15=0$$

என்ற கோளத்தின் மையம் மற்றும் ஆரம் காண்க.

S.No. 2035

Find the equation of the sphere whose diameter is the join of $(2, -3, 1)$ and $(1, -2, -1)$.

$(2, -3, 1)$ மற்றும் $(1, -2, -1)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டை விட்டமாக கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

Define cone.

வளையறு-கூம்பு.

What is the condition that the equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ represents a cone?

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ என்ற சமன்பாடு கூம்பாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை என்ன?

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

(a) Prove that $\sin^7 \theta = \frac{-1}{64} [\sin 7\theta - 7\sin 5\theta + 21\sin 3\theta - 35\sin \theta]$.

$\sin^7 \theta = \frac{-1}{64} [\sin 7\theta - 7\sin 5\theta + 21\sin 3\theta - 35\sin \theta]$ என நிரூபி.

$\sin^7 \theta = \frac{-1}{64} [\sin 7\theta - 7\sin 5\theta + 21\sin 3\theta - 35\sin \theta]$ என நிரூபி.

Or.

3

S No 2025

(b) If $\cos(x + iy) = \cos \theta + i \sin \theta$, show that $\cos 2x + \cosh 2y = 2$.

$\cos(x + iy) = \cos \theta + i \sin \theta$ எனில் $\cos 2x + \cosh 2y = 2$ என நிரூபி.

12. (a) Prove that $\log[1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta] = \log[2 \cos \theta] + i\theta$.

$\log[1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta] = \log[2 \cos \theta] + i\theta$ என நிரூபி.

Or.

(b) Separate into real and imaginary parts of $\log(1 + i)^{-i}$.
 $\log(1 + i)^{-i}$ என்பதை மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளாக பிரித்து எழுது.

13. (a) Find the equation of the line passing through $(2, 1, -2)$ and perpendicular to the plane $3x - 5y + 2z + 4 = 0$.

$(2, 1, -2)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் $3x - 5y + 2z + 4 = 0$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் உள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

Or

Find the perpendicular distance from $(3, 9, -1)$ to the line $\frac{x+8}{-8} = \frac{y-31}{1} = \frac{z-13}{5}$.

$(3, 9, -1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $\frac{x+8}{-8} = \frac{y-31}{1} = \frac{z-13}{5}$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு உள்ள செங்குத்து தூரம் காண்க.

- (a) A sphere of constant radius K always passes through the origin and meets the coordinate axes in A, B, C . Prove that the locus of the centroid of the triangle ABC is the sphere $9(x^2 + y^2 + z^2) = 4K^2$.

எப்பொழுதும் ஆதி வழிச்செல்லும் நிலையான ஆரம் K உள்ள ஒரு கோளம் ஆய அச்சகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால் முக்கோணம் ABC யின் மையகோட்டு சந்தியின் நியமப்பாடு ஒரு கோளம் $9(x^2 + y^2 + z^2) = 4K^2$ என நிரூபி.

Or

- (b) Show that the plane $2x - y - 2z = 16$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z = 3 = 0$ and find the point of contact.

$2x - y - 2z = 16$ என்ற தளம் $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z = 3 = 0$ என்ற கோளத்தை தொடும் என காட்டுக. அத்தொடும் புள்ளியைக் காண்க.

15. (a) Find the equation to the right circular cone whose vertex is at the origin, whose axis is the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and which has a vertical angle of 60° .

ஆதிபுள்ளியை உச்சியாகவும் $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ என்ற நேர்க்கோட்டை அச்சாகவும் உச்சிக்கோணம் 60° எனவும் கொண்ட செங்குத்து வட்ட கூம்பின் சமன்பாடு காண்க.

Or

- (b) Find the equation of the cone of the second degree which passes through the axes.

ஆய அச்சகள் வழியாகச் செல்லும் கூம்பின் இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If $\tan(\theta + i\phi) = \cos \alpha + i \sin \alpha$, prove that

$$\theta = \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ and } \phi = \frac{1}{2} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

$\tan(\theta + i\phi) = \cos \alpha + i \sin \alpha$ எனில் $\theta = \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$ மற்றும்

$$\phi = \frac{1}{2} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \text{ எனவும் நிரூபி.}$$

17. If $[\cos(\theta + i\phi)]^{r+iy} = A + iB$, then prove that

$$\tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{y}{2} \log[\cosh^2 \phi - \sin^2 \theta] +$$

$$x \tan^{-1}(\tan \theta \tanh \phi).$$

$[\cos(\theta + i\phi)]^{r+iy} = A + iB$ எனில்

$$\tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{y}{2} \log[\cosh^2 \phi - \sin^2 \theta] +$$

$$x \tan^{-1}(\tan \theta \tanh \phi) \text{ என நிரூபி.}$$

18. Find the shortest distance between the lines $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ and $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$. Also

find the equation of the line of shortest distance and point where it intersects the lines.

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} \text{ மற்றும் } \frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$$

என்ற கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள மிகக் குறுகிய தூரத்தைக் காண்க. மேலும் அதன் சமன்பாடுகள் மற்றும் கோட்டை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க.

19. Find the equation to the sphere through the four points $(2, 3, 1)$, $(5, -1, 2)$, $(4, 3, -1)$ and $(2, 5, 3)$.

$(2, 3, 1)$, $(5, -1, 2)$, $(4, 3, -1)$ மற்றும் $(2, 5, 3)$ என்ற நான்கு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

20. Find the condition for the equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ to represent a right circular cone. Also find the equation of its axis.

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ என்ற ஒரு செங்குத்து வட்ட கூம்பாக இருப்பதற்கான சமன்பாடு நிபந்தனைகளைக் காண்க. மேலும் அதன் அச்சின் சமன்பாடு காண்க.