

S.No. 5322

19UMA02

(For the candidates admitted from 2019–2020 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, MARCH/APRIL 2021.

First Semester

Mathematics

DIFFERENTIAL CALCULUS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (15 × 1 = 15 marks)

Answer ALL questions.

1. If $y = \frac{1}{(ax+b)^2}$ then $y_2 =$

(a) $(ax+b)^{-4} a^2$ (b) $(ax+b)^{-3} a$

(c) $6(ax+b)^{-4}$ (d) $6a^2(ax+b)^{-4}$

$y = \frac{1}{(ax+b)^2}$ எனில் $y_2 =$

(அ) $(ax+b)^{-4} a^2$ (ஆ) $(ax+b)^{-3} a$

(இ) $6(ax+b)^{-4}$ (ஈ) $6a^2(ax+b)^{-4}$

2. If $z = e^x(x \cos y - y \sin y)$ then $\frac{\partial z}{\partial x}$ is

- (a) $e^x(x \cos y - y \sin y)$
- (b) $e^x(\cos y - y \sin y)$
- (c) $e^x(x \cos y - y \sin y) + e^x \cos y$
- (d) $e^x(x \cos y - y \sin y) - y \sin y$

$z = e^x(x \cos y - y \sin y)$ எனில் $\frac{\partial z}{\partial x}$ - ஆனது

- (அ) $e^x(x \cos y - y \sin y)$
- (ஆ) $e^x(\cos y - y \sin y)$
- (இ) $e^x(x \cos y - y \sin y) + e^x \cos y$
- (ஈ) $e^x(x \cos y - y \sin y) - y \sin y$

3. If $u = x^2y + 3xy^4$ where $x = e^t$ and $y = \sin t$ then

$\frac{du}{dt}$ is

- (a) $(2xy + 3y^4)e^t$
- (b) $(2xy + 3y^4)e^t + (x^2 + 12xy^3)\cos t$
- (c) $(x^2y + 3xy^4)e^t$
- (d) $(x^2y + 3y^4)e^t + (x^2 + xy^3)\cos t$

$u = x^2y + 3xy^4$ மேலும் $x = e^t$, $y = \sin t$ எனில் $\frac{du}{dt}$ ஆனது

(அ) $(2xy + 3y^4)e^t$

(ஆ) $(2xy + 3y^4)e^t + (x^2 + 12xy^3)\cos t$

(இ) $(x^2y + 3xy^4)e^t$

(ஈ) $(x^2y + 3y^4)e^t + (x^2 + xy^3)\cos t$

4. If the curves cut at right angles then $\tan \phi_1 \tan \phi_2 =$

(a) 1 (b) 0

(c) 2 (d) -1

இரண்டு வளைவரைகள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கிறது எனில் $\tan \phi_1 \tan \phi_2 =$ ஆனது

(அ) 1 (ஆ) 0

(இ) 2 (ஈ) -1

5. If $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ then the asymptote is

(a) y -axis (b) x -axis

(c) x and y axis (d) none

$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ -ன் தொலை தொடு கோடுகள்

(அ) y -axis (ஆ) x -axis

(இ) x and y axis (ஈ) none

6. If $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ then $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ is

(a) r^2 (b) r

(c) 1 (d) $-r$

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ எனில் $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ -ன் மதிப்பு

(அ) r^2 (ஆ) r

(இ) 1 (ஈ) $-r$

7. If $x = u(1+v)$ and $y = v(1+u)$, then $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ is

(a) $1+u$ (b) $1+v$

(c) $1+u-v$ (d) $1+u+v$

$x = u(1+v)$, $y = v(1+u)$ எனில் $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ -ன் மதிப்பு

(அ) $1+u$ (ஆ) $1+v$

(இ) $1+u-v$ (ஈ) $1+u+v$

8. The necessary conditions for the existence of maxima or minima for $f(x, y)$ at $x = a, y = b$ are

(a) $f_x(a, b) = 0$

(b) $f_y(a, b) = 0$

(c) $f_x(a, b) = 0$ and $f_y(a, b) = 0$

(d) None

மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு-வை அடைவதற்கு தேவையான கட்டுப்பாடுகள் $f(x, y)$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $x = a, y = b$ என்ற புள்ளியில்

(அ) $f_x(a, b) = 0$

(ஆ) $f_y(a, b) = 0$

(இ) $f_x(a, b) = 0$ and $f_y(a, b) = 0$

(ஈ) None

9. For $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$ then the asymptotes parallel to x -axis only are

(a) $x - a = 0, x + a = 0$ (b) $y - a = 0, y + a = 0$

(c) $x - a = 0, y - a = 0$ (d) $x + a = 0, y + a = 0$

$x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$ எனில், x -அச்சுக்கு இணையான தொலை தொட்டு கோடுகள்

(அ) $x - a = 0, x + a = 0$ (ஆ) $y - a = 0, y + a = 0$

(இ) $x - a = 0, y - a = 0$ (ஈ) $x + a = 0, y + a = 0$

10. The radius of curvature $\rho =$

(a) $\rho = \frac{1 + y_1^2}{y_2}$ (b) $\rho = \frac{(1 + y_1)^2}{y_2}$

(c) $\rho = \frac{(1 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}$ (d) $\rho = \frac{(1 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}{y_1}$

வளை ஆரை $\rho =$

(அ) $\rho = \frac{1 + y_1^2}{y_2}$ (ஆ) $\rho = \frac{(1 + y_1)^2}{y_2}$

(இ) $\rho = \frac{(1 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}$ (ஈ) $\rho = \frac{(1 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}{y_1}$

11. The radius of curvature at $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ to the curve

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ is

(a) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{a}$

(c) $2a$ (d) $\sqrt{2}a$

$\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ என்ற புள்ளியில் $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ - க்கு வளை ஆரை

(அ) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (ஆ) $\frac{\sqrt{2}}{a}$

(இ) $2a$ (ஈ) $\sqrt{2}a$

12. The radius of curvature at (x, y) on the curve $y = \cosh \frac{x}{c}$ is

(a) $\frac{x^2}{c}$ (b) $\frac{x^2}{c^2}$

(c) $\frac{y^2}{c}$ (d) $\frac{y^2}{c^2}$

$y = \cosh \frac{x}{c}$ என்ற வளைவரைக்கு (x, y) -புள்ளியில் வளை ஆரை

(அ) $\frac{x^2}{c}$ (ஆ) $\frac{x^2}{c^2}$

(இ) $\frac{y^2}{c}$ (ஈ) $\frac{y^2}{c^2}$

13. The envelope of the family of the curves $(x - \alpha)^2 + y^2 = 4\alpha$ is

(a) $x^2 = 4(y+1)$ (b) $y^2 = 4(x+1)$

(c) $x^2 y^2 = 4$ (d) $xy = (x+1)(y+1)$

$(x - \alpha)^2 + y^2 = 4\alpha$ -ன் வளைவரை குடும்பத்திற்கான சூழ்வை காண்க

(அ) $x^2 = 4(y+1)$ (ஆ) $y^2 = 4(x+1)$

(இ) $x^2 y^2 = 4$ (ஈ) $xy = (x+1)(y+1)$

14. The envelope of the family of the lines $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ is

(a) $x^2 = p^2$ (b) $y^2 = p^2$

(c) $x^2 - y^2 = p$ (d) $x^2 + y^2 = p^2$

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ என்ற வளைவரை குடும்பத்திற்கான கோட்டை காண்க

(அ) $x^2 = p^2$ (ஆ) $y^2 = p^2$

(இ) $x^2 - y^2 = p$ (ஈ) $x^2 + y^2 = p^2$

15. The necessary condition for the existence of an envelope for a family of curves $f(x, y, \alpha) = 0$ is

(a) $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0$

(b) $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, \alpha) = -1$

(c) $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, \alpha) = 0$

(d) $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, \alpha) = 0$

$f(x, y, \alpha) = 0$ என்ற வளைவரை குடும்பத்திற்கான சூழ்வு அமைய தேவையான கட்டுபாட்டை காண்க.

(அ) $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0$

(ஆ) $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, \alpha) = -1$

(இ) $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, \alpha) = 0$

(ஈ) $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, \alpha) = 0$

PART B — (2 × 5 = 10 marks)

Answer any TWO questions.

16. If $z = f(x, y)$, where $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, show that $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$.

$z = f(x, y)$ மற்றும் $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ எனில் $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ என நிறுவுக.

17. If $f = a \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, verify that $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

$f = a \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ எனில் $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ என சரிபார்க்க.

18. Prove that the parabolas $r = \frac{a}{1 + \cos \theta}$ and

$r = \frac{a}{1 - \cos \theta}$ intersect each other orthogonally.

$r = \frac{a}{1 + \cos \theta}$ மற்றும் $r = \frac{a}{1 - \cos \theta}$ என்ற பரவளையங்கள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன என நிறுவுக.

19. Find the radius of curvature at any point on the curve $r^n = a^n \cos n\theta$.

$r^n = a^n \cos n\theta$ என்ற வளைவரையின் வளை ஆரைக் காண்க.

20. Find the envelope of $x \cos^3 \alpha + y \sin^3 \alpha = 0$ where α is parameter.

$x \cos^3 \alpha + y \sin^3 \alpha = 0$ -ன் சூழ்வைக் காண்க.

PART C — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

21. (a) Find the maximum and minimum values $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ -ன் மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்பைக் காண்க.

Or

- (b) If $u = x\sqrt{1+y^2}$, $x = te^{2t}$, $y = e^{-t}$, find $\frac{du}{dt}$.

$u = x\sqrt{1+y^2}$, $x = te^{2t}$, $y = e^{-t}$, எனில் $\frac{du}{dt}$ -யை காண்க.

22. (a) If $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y}\right)$, show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u .$$

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y}\right) \text{ எனில் } x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

என காட்டுக.

Or

(b) Find the extreme values of the function $f(x, y) = x^2 + y$ on the circle $x^2 + y^2 = 1$.

$f(x, y) = x^2 + y$ என்ற சார்பு வட்டம் $x^2 + y^2 = 1$ -
ல் அமைந்த அறுதி மதிப்புகளை காண்க.

23. (a) Find the pedal equation for the curve $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற வளைவரையின் பாத
சமன்பாட்டைக் காண்க.

Or

(b) Find the asymptotes of $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$ -ன் தொலை தொடுகோடுகளை
காண்க.

24. (a) Prove that the radius of curvature at the point $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ on the curve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ is $3a \sin \theta \cos \theta$.

$(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ என்ற புள்ளியில் $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்ற வளைவரைக்கு வளை ஆரை $3a \sin \theta \cos \theta$ எனக் காட்டு.

Or

- (b) Find that the radius of curvature at $(a, 0)$ on the curve $y^2 = \frac{a^2(a-x)}{x}$.

$y^2 = \frac{a^2(a-x)}{x}$ என்ற வளைவரைக்கு $(a, 0)$ என்ற புள்ளியில் அமைந்த வளை ஆரையை காண்க.

25. (a) Find the envelope of the family of curves $\frac{x^3}{a^3 \cos \theta} + \frac{y^3}{b^3 \sin \theta} = 1$, where θ is parameter.

$\frac{x^3}{a^3 \cos \theta} + \frac{y^3}{b^3 \sin \theta} = 1$ என்ற வளைவரை குடும்பத்தின் சூழ்வை காண்க.

Or

(b) Show that the evaluate of the parabola $y^2 = 4ax$ is $2Tay^2 = 4(x - 2a)^3$.

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் அலர்வரை $2Tay^2 = 4(x - 2a)^3$ என நிரூபி.
