

(7 pages)

S.No. 2456

12 UMA 13

(For the candidates admitted from 2012-2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION,
NOVEMBER/DECEMBER 2015.

Sixth Semester

Mathematics

GRAPH THEORY

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Show that the sum of the degree of the points of a graph G is twice the number of lines.

ஒரு வரையின் எல்லா முனைகளின் படிகளின் கூட்டுத்தொகை ஆனது, அதன் கோடுகளின் எண்ணிக்கையின் இருமடங்கு ஆகும் என காண்க.

2. Define regular graph of degree r .

r -படிச்சீர் வரைவு வரையறு.

3. Define path.

பாதையை வரையறு.

4. Define disconnected graph.

இணைப்பற்ற வரைபடம் வரையறு.

5. Define Hamiltonian cycle.

ஹேமில்டோனியின் சுற்றை வரையறு.

6. Define theta graph.

தீட்டா வரைவு - வரையறு.

7. Define Tree.

மரம் வரையறு.

8. Define radius of a tree.

ஒரு மரத்தின் ஆரம் வரையறு.

9. Define indegree.

உள்படி வரையறு.

10. Define adjacency matrix of a digraph.

அடுத்துள்ள அணியை நேர்வரையில் வரையறு.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Show that in any group of two or more people, there are always two with exactly the same number of friends inside the group.

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்பினர்கள் கொண்ட ஒரு கூட்டத்தில், இருவருக்காவது சமமான எண்ணிக்கையில் நண்பர்கள் இருப்பார்கள் என நிரூபி.

Or

- (b) Let G be a K -regular bigraph with bipartition (V_1, V_2) and $K > 0$. Prove that $|V_1| = |V_2|$.

G என்பது K -படிச்சீர் இருகூர் வரைபு என்க. (V_1, V_2) அதன் இருகூர் எனில், $|V_1| = |V_2|$, $K > 0$ என நிறுவுக.

12. (a) If $\delta \geq K$, then prove that G has a path of length K .

$\delta \geq K$ எனில், G -ன் பாதையின் நீளம் K எனக் காட்டுக.

Or

- (b) If G is not connected, then prove that \bar{G} is connected.

இணைப்பற்ற வரைபடம் G எனில், இணைந்த வரைபடம் \bar{G} என நிறுவுக.

3

S.No. 2456

13. (a) If G is a graph in which the degree of every vertex is atleast two, then prove that G contains a cycle.

G என்ற மரத்தில், ஒவ்வொரு புள்ளியின் படி குறைந்தபட்சம் இரண்டு எனில், G -ல் சுற்று இருக்கும் என நிறுவுக.

Or

- (b) Prove that a graph is hamiltonian iff its closure $C(G)$ is hamiltonian.

G ஹாமில்டன் வரைபாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $C(G)$ ஹாமில்டன் வரைபாக இருக்கும் என நிரூபி.

14. (a) Prove that every connected graph has a spanning tree.

ஒவ்வொரு இணைந்த வரைபடத்தில் பரவல் மரம் உள்ளது என நிறுவுக.

Or

- (b) Prove that every non-trivial tree G has atleast two vertices of degree 1.

G என்ற மரத்தில், 1 படி உடைய புள்ளிகள் குறைந்தபட்சம் இரண்டாவது இருக்கும் என நிறுவுக.

4

S.No. 2456
[P.T.O.]

15. (a) If two digraphs are isomorphic, then prove that the corresponding points have the same degree pair.

இரு திசை வரைபுகள் ஒரினமாயிருந்தால், எந்த ஒரு புள்ளியின் படி இணையும், ஒரினச் சார்பில் அதன் பிம்பப் புள்ளியின் படி இணையும் சமம் என நிறுவுக.

Or

- (b) Define isomorphism of a digraph and give one example.

ஒரின நேர்வரையை எடுத்துக்காட்டுடன் தருக.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Let G_1 be a (p_1, q_1) graph and G_2 be a (p_2, q_2) graph. Prove that

- (a) $G_1 + G_2$ is a $(p_1 + p_2, q_1 + q_2 + p_1 p_2)$ graph
 (b) $G_1 \times G_2$ is a $(p_1 p_2, q_1 p_2 + q_2 p_1)$ graph.

G_1 ஒரு (p_1, q_1) வரைபு, G_2 ஒரு (p_2, q_2) வரைபு எனில்

- (அ) $G_1 + G_2$ ஒரு $(p_1 + p_2, q_1 + q_2 + p_1 p_2)$ வரைபு
 (ஆ) $G_1 \times G_2$ ஒரு $(p_1 p_2, q_1 p_2 + q_2 p_1)$ வரைபு என நிறுவுக.

17. For any graph G , prove that $K \leq \lambda \leq \delta$.

G என்ற எந்த வரைபிலும், $K \leq \lambda \leq \delta$ என நிறுவுக.

18. Prove that the following statements are equivalent for connected graph G :

- (a) G is Eulerian
 (b) Every point of G has even degree
 (c) The set of edges of G can be partitioned into cycles.

G ஒரு தொடர் வரைபு எனில், கீழ்க்கண்டவை ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை என நிறுவுக.

- (அ) G ஓர் ஆய்வர் வரைபு
 (ஆ) ஒவ்வொரு புள்ளியின் படியும் இரட்டைப்பட எண்
 (இ) $E(G)$ சுற்றுகளாகக் கூறாக்கப்படக் கூடியது.

19. Prove that every tree has a centre consisting of either one point or two adjacent points.

எந்த ஒரு மரத்தின் மையத்திலும் ஒரு புள்ளியோ அல்லது இரு அண்டைப் புள்ளிகளோ இருக்கும் என நிறுவுக.

20. Prove that the edges of a connected graph $G = (V, E)$ can be oriented so that the resulting digraph is strongly connected iff every edge of G is connected in atleast one cycle.

ஓர் இணைந்த வரை $G = (V, E)$ -ன் கோடுகளை ஈடுபாட்டு வரையாக கிடைக்கும் வரை வலிமையாக இருக்கத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை G -ன் ஒவ்வொரு கோடும் குறைந்தது ஒரு சுற்றியாவது இருக்கும் என நிறுவுக.