(7 pages)

S.No. 2409

17UMA10

(For the candidates admitted from 2017–2018 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2020.

Fifth Semester

Mathematics

REAL ANALYSIS – I

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

1. Define Cartesian product.

   கார்ட்டிசியன் பெருக்கல் வரையறு.

2. Define a Sequence.

   வரிசை வரையறு.

3. Define a monotone sequence.

   மோனோடோன் வரிசை வரையறு.

4. Given an example of Cauchy sequence.

   காசியஸ் தொடருக்கு எடுத்துக்காட்டு தருக.

5. Define a harmonic series.

ஆர்மோனிக் தொடர் வரையறு.

6. Define the class l^2.

வர்க்கம் l^2 வரையறு.

7. Define rearrangement.

மறு ஒழுங்கமைவு வரையறு.

8. Define a metric space.

யாப்புவெளி வரையறு.

9. Define an open set.

திறந்த கணம் வரையறு.

10. Define a closed set.

மூடிய கணம் வரையறு.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Prove that the set of all rational numbers is countable.

விகித முறு எண்களின் கணம் எண்ணிடத்தக்கது என நிறுவுக.

Or

(b) If $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is sequence of non – negative numbers and if $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$, show that $L \geq 0$.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற வரிசையில் உள்ள எதிர்மறை அல்லாத எண்கள் எனில் மற்றும் $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$, எனில் $L \geq 0$ என நிறுவுக.

12. (a) If a sequence of real numbers $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent, verify that $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is bounded.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ வரிசையில் உள்ள மிகை எண்கள் ஒருங்கும் எனில் $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ வரம்புடையது என நிறுவுக.

Or

(b) If $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ are bounded sequence of real numbers, prove that $\lim\limits_{n\to\infty}$ sup $((S_n + t_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty})\text{sup } S_n + \lim\limits_{n\to\infty}\text{sup } t_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\inf\,(s_n + t_n) \geq \lim\limits_{n\to\infty}\inf\, S_n + \lim\limits_{n\to\infty}\inf\, t_n$.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ மற்றும் $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஆனது வரம்புடைய வரிசைகள் எனில், $\lim\limits_{n\to\infty}$ sup $((S_n + t_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty})\text{sup } S_n + \lim\limits_{n\to\infty}\text{sup } t_n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\inf$ $(s_n + t_n) \geq \lim\limits_{n\to\infty}\inf\, S_n + \lim\limits_{n\to\infty}\inf\, t_n$ என நிறுவுக.

13. (a) Find the series $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ is divergent.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ ஒருங்காது என நிறுவுக.

Or

(b) If for some $x \in R$ the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ are absolutely convergent then $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

சில $x \in R$ உள்ள பவர்சீரிஸ் $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ மற்றும் $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ஆனது முற்றிலும் ஒருங்கும் எனில் $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ என நிறுவுக.

14. (a) If $S = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $t = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ are in l^2, show that $\sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n$ is absolutely convergent and $\left[\sum_{n=1}^{\infty} (s_n t_n)^2\right] \leq \left[\sum_{n=-1}^{\infty} s_n{}^2\right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2\right]^{1/2}$.

$S = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ மற்றும் $t = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது l^2 உள்ளது எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n$ முற்றிலும் ஒருங்கும்

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (s_n t_n)^2\right] \leq \left[\sum_{n=-1}^{\infty} s_n{}^2\right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2\right]^{1/2}$$ என

நிருப்பிக்க.

Or

(b) Let f be a non – decreasing function on the bounded open interval (a, b). If f is bounded above on (a, b), verify that $\lim_{x \to b^-} f(x)$ exists. Also if f is bounded below on (a,b) prove that $\lim_{x \to a^+} f(x)$ exist.

திறந்த இடைவெளி (a, b) யில் f என்ற குறைக்கப்படாத செயல்பாடு வரம்புடையது என எடுத்துக் கொள்வோம். (a, b)யின் மேலே f வரம்புடையது எனில் $\lim_{x \to b^-} f(x)$ உள்ளது என நிறுவுக.

(a, b)யின் கீழே f வரம்புடையது எனில் $\lim_{x \to a^+} f(x)$ உள்ளது என நிறுவுக.

15. (a) If f and g are real – valued functions. If f is continuous at a, and if g is continuous at $f(a)$, show that $g \circ f$ is continuous at a.

f மற்றும் g ஆனது உண்மையான மதிப்புள்ள செயல்பாடு எனில், a யில் f தொடர்ச்சியானது எனில் மற்றும் $f(a)$ யில் g தொடர்ச்சியானது எனில், a யில் $g \circ f$ தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

Or

(b) If $\mathcal{F}$ is any family of closed subsets of a metric space M, show that $\bigcap_{F \in \mathcal{F}}$ is also closed.

யாப்பு வெளி M ன் மூடிய துணை கணங்களுடைய எந்த குடும்பமும் $\mathcal{F}$ எனில், $\bigcap_{F \in \mathcal{F}}$ ஆனது மேலும் மூடியது என நிறுவுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If $f : A \to B$ and $x \subset A$, $y \subset A$ prove that $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$.

$f : A \to B$ மற்றும் $x \subset A$, $y \subset A$ எனில் $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$ என நிறுவுக.

17. If $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of real numbers, and $\lim_{n\to\infty} t_n = M$, where $M \neq 0$ verify that $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{t_n}\right) = 1/M$.

$\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது மெய் எண்களின் வரிசை எனில், $\lim_{n\to\infty} t_n = M$, எனில், $M \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{t_n}\right) = 1/M$ என நிறுவுக.

18. If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent series, show that $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பது ஒருங்கும் தொடர் எனில், $\lim_{n\to\infty}$ என நிறுவுக.

19. Let $\langle M, \rho \rangle$ be a metric space. If $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a convergent sequence of points of M, prove that $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is Cauchy.

யாப்பு வெளி $\langle M, \rho \rangle$ என எடுத்துக் கொள்வோம். $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது ஒருங்கும் வரிசையினுடைய புள்ளி M எனில் $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது காசியஸ் என நிறுவுக.

20. If E is any subset of a metric space M, verify that $\overline{E}$ is closed.

யாப்புவெளி M உடைய எந்த ஒரு உபகணம் E எனில், $\overline{E}$ மூடியது என நிறுவுக.
